単　　　利

高　見　茂　雄

要約：ファイナンス分野で，将来のキャッシュフローを現在価値に割り戻す場合，複利を用いるのがあたりまえのこととされている。本論文では，その根拠を考察し，複利に変えて単利を用いることにもある程度の根拠があることを論じる。そして，仮に単利で現在価値の体系を組み立てた場合，単利と複利でどの程度の差異があるかを，実務的な範囲で，数理と数値分析の面から検討した。

キーワード：単利と複利，投資機会，現在価値，年金現在価値，ディー・ガンマ関数

1. はじめに

ファイナンスの講義で，はじめて現在価値を教える場合，まず単利の資金運用を説明した後，複利の資金運用を説明，そして，将来のキャッシュフローを複利で現在価値に割り戻す概念とその計算方法を解説する。おそらく，たいていの教科書はこの流れに沿っていると思うが，なぜ，単利ではなく複利概念を採用するのかという点に関しては，あまり深い議論がなされていないものと考える。また，あまりにもあたりまえなこととらえられているのか，この分野での先行研究はみられない。

代表的な教科書Brealey and Myers(2002, p.41)は「ファイナンスの問題は

ほとんどすべて複利で考えるので，特に単利が明示されてない場合は複利で考えるように」と複利計算のプラクティスがまずその根拠になる[1]。しかし，プラクティスだけの理由で複利が単利に比べ適切だという理由にはならない。別の代表的教科書ロスら(2004, p.100)は単利を棄却して複利を採用する理由を明示的には述べていないが，「・・・すぐに使える貸出の機会を提供することによって，資本市場は投資家に，今の 1 ドルを 2 年目の年度末には1.1881ドルに帰ることを可能にする[2]」と複利の投資機会があることを示している。

この考えを発展させれば，積極的に単利を棄却して複利を採用することの根拠は，現実の資本市場に単利より複利の投資機会が豊富にあることに帰着し，その現実性を吟味することが課題となる。古川ら(2001, p.27)は「このように，利子にさらに利子が付くことを複利という。経済社会にはつねに投資機会が存在するので，得られた利子を無利子で預金することは合理的でない。そのため，以下では，複利の場合だけを議論し，特別の場合を除いて，単利にはこれから以降は触れない。」と述べている。しかし，つねに投資機会が存在すると断定的にいえるのか，この点を本考察の出発点とし，以降 2 節では単利計算の根拠を論じ，3 節では複利と単利との間の現在価値の差異を示し，実務上取扱の注意点について論じる。そして，4 節で結論を述べる。

2. 単利計算の根拠

企業Aでは初期投資額I_0円，t 期末の予想キャッシュフローCF_t円(t=1,2,3)，資本コストrの投資案件が存在し，その採否を決定するファイナンスの定番問題を考える。教科書では(1)式が成り立てば，$NPV_C>0$ なので，投資案件採用という意思決定が支持される。

1　1980年代以降，HP-12C電卓や表計算ソフトの普及によって，むしろファイナンスの教科書，ビジネススクールの授業などが金融実務界で複利のプラクティスを作っていった面もあろうかと考える。

2　$(1.09)^2 = 1.1881$の事例。

$$NPV_c = \frac{CF_1}{1+r} + \frac{CF_2}{(1+r)^2} + \frac{CF_3}{(1+r)^3} - I_0 > 0 \qquad (1)$$

１節の考察を発展させれば，企業Aは現在(t＝0) $CF_1/(1+r)+CF_2/(1+r)^2+CF_3/(1+r)^3$円のキャッシュを保有しているが，資本市場にはリスク度が本件投資案件と同一で，満期がｔ期末と一致するスポットレートrの1，2，3年物ゼロクーポン債(割引債)があり[3]，１年物に$CF_1/(1+r)$円，２年物に$CF_2/(1+r)^2$円，３年物に$CF_3/(1+r)^3$円を投資すれば，１年後にCF_1円，２年後にCF_2，３年後にCF_3円のキャッシュの受取が期待できる，という状況を暗黙に仮定している。そして，(1)式が成り立つならば，保有資金より少ない資金I_0円の実物投資を行うことで，同じリスクで，まったく同じ将来のキャッシュを獲得できるので，裁定機会が生じ，この投資案件は採用される。

ここで，これらの前提を吟味する。まず，日本でリスクフリーの国債以外に，ゼロクーポン債(割引債)の発行体はあまり見られない。そして，円貨の証券投資対象で同じ満期日，同じリスク度の格付で，しかも，1,2,3年物それぞれ別々の購入単位で買い付けることはなおさらのこと不可能である[4]。ただ，これらの考察は，複利を採用する現実的根拠は希薄であることは示してものの，積極的に単利を採用することにはならない。

問題は，どちらを積極的に採用するというより，運用機会は単利か複利かどちらの方が現実的か，事例でいえば，1,2年後の応答日の利子相当額に対し，再運用の機会が現実的にあるかどうかという点で検討されるべきである。その意味でいえば，単利の方が現実的である。なぜなら，もともと流動性のさほど高くない社債流通市場で，たまたまキャッシュフローの近い利付債で運用でき

3　設例ではフラットイールドカーブの金利の期間構造を前提にしている。この意味で，単に３年債だけのパーレートを与えた状況は想定していない。このように複利ベースでは，パーレートとスポットレートは区別して考えられる概念であるが，単利の金利の期間構造では両者同じ概念となる。

4　US Treasuriesストリップス債を購入し，通貨クレジットスワップを組むことで達成できようが，取引コストが無視できないと考えられる。

たにせよ，1,2年後の応答日の利子相当額に対し，t＝0時点で，投資物件を確定させせることはほとんど困難だからである[5]。そして，1,2年後に受取るキャッシュは，金利水準の高くない現先，CP，定期預金などの短期金融商品で３年後応答日まで運用される可能性が高く，無利子で当座預金に滞留させるのとさほど変らない。

それに，各年ごと将来の予想キャッシュフローCF_t円(t＝1,2,3)を想定するところから，すでに単利の考え方が暗示的に含まれている。というのは，企業経営において，投資案件にもとづくキャッシュフローの成果が年度末の一日に集中して実現されることは考えられないからである。仮に投資案件を実行すれば，営業活動に徐々に影響が現れ，毎営業日にキャッシュフローの流入と流出が起こりうる。しかし，毎営業日ごとのキャッシュフロー予想は困難であるから，１年間に渡り予想キャッシュフローをCF_t円と予想することで近似している。ここで，１年間に渡る予想キャッシュフローは概念的には毎営業日の予想キャッシュフローの単純合計であり，複利に相応する(r/365)％の利息相当分は含まれていない。つまり，もともと予想キャッシュフローを想定するときには単利で考えているのに，現在価値を求めるときに複利で考えるのは一貫性がとれていない。

このような考察から，少なくとも積極的に単利を棄却し，複利を採用する理由はないと考えられるので，(2)式のような単利を用いたファイナンスの体系も検討することは意義がある。

$$NPV_S = \frac{CF_1}{1+r} + \frac{CF_2}{1+2r} + \frac{CF_3}{1+3r} - I_0 > 0 \qquad (2)$$

5　OTCでフォワードレートアグリーメント，円短期金利先物によるヘッジも考えられるが，これらもまた，取引コストが無視できないであろう。

3. 現在価値の比較

3.1. t 期の現在価値の比較

われわれは実務上複利の現在価値になれているので，単利の現在価値を導入した場合，どのくらいの差異が生じるのかを検討する。t 期の単利現在価値 V_S は $V_S = 1/(1+tr)$，複利現在価値 V_C は $V_S = 1/(1+r)^t$ で定義されるので，常に $V_S \geq V_C$ が成り立つことは自明であるが，（r，t）が与えられたときどのくらい乖離があるかを調べる。

まず，比 V_S / V_C が単調増加であることを示す。対数をとった(3)式が r と t について単調増加であることを示せば十分である。

$$\log\left(\frac{V_S}{V_C}\right) = \log\left(\frac{1}{(1+tr)}\Big/\frac{1}{(1+r)^t}\right) = t\log(1+r) - \log(1+tr) \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\log\left(\frac{V_S}{V_C}\right)\right) = \frac{t}{1+r} - \frac{t}{1+tr} \tag{4}$$

(4)式にて，$r > 0$，$t \geq 2$ に対し常に正であるので r に関し単調増加である。

つぎに，t に関する変化は(5)式で表すことができるが，必ずしも符号関係は自明ではない。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\log\left(\frac{V_S}{V_C}\right)\right) = \log(1+r) - \frac{r}{1+tr} \tag{5}$$

しかし，(5)右辺で，$t = 1$ の場合で正であることが言えれば，$t \geq 2$ の場合，第 2 項分母はより大きな値で割ることになるので，すべての t の場合で正である。ところが(6), (7)が成り立つので，結局(5)式符号は正である。これで，t

に関しても単調増加であることが示された。

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\log(1+r)-\frac{r}{1+r}\right\}=\frac{r}{(1+r)^2}>0 \tag{6}$$

$$\lim_{r\to 0}\left\{\log(1+r)-\frac{r}{1+r}\right\}=0 \tag{7}$$

つぎに，逓増か否かであるが，r に関しては(8)式分子の$(1\text{-}tr^2)$項の符号に依存するが，実務上は高々$r\leq 20\%$，$t\leq 20$くらいの範囲では符号は常に正になるので，逓増といえる。

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\log\left(\frac{V_S}{V_C}\right)\right)=\frac{t(t-1)\left(1-tr^2\right)}{(1+r)^2(1+tr)^2} \tag{8}$$

最後に t に関しては(9)式が成り立ち，常に正であるから，逓増といえる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\log\left(\frac{V_S}{V_C}\right)\right)=\frac{r^2}{(1+tr)^2}>0 \tag{9}$$

以上より，(3)式左辺はほぼ単調逓増であることが示されたが，実務的な範囲で V_S と V_C はどのくらい差異があるのかは，実際に計算をして見なければつかめない。そこで，ロスら(2004)のテーブルの範囲で代表的な値を計算した。表 1 は V_S，表 2 は V_C，表 3 は，比 V_S/V_C の値を示している。

表 1　t 期現在価値(単利)

期間数	利回り 1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	13%	15%	20%	30%
1	0.9901	0.9804	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346	0.9259	0.9174	0.9091	0.8850	0.8696	0.8333	0.7692
2	0.9804	0.9615	0.9434	0.9259	0.9091	0.8929	0.8772	0.8621	0.8475	0.8333	0.7937	0.7692	0.7143	0.6250
3	0.9709	0.9434	0.9174	0.8929	0.8696	0.8475	0.8264	0.8065	0.7874	0.7692	0.7194	0.6897	0.6250	0.5263
4	0.9615	0.9259	0.8929	0.8621	0.8333	0.8065	0.7813	0.7576	0.7353	0.7143	0.6579	0.6250	0.5556	0.4545
5	0.9524	0.9091	0.8696	0.8333	0.8000	0.7692	0.7407	0.7143	0.6897	0.6667	0.6061	0.5714	0.5000	0.4000
6	0.9434	0.8929	0.8475	0.8065	0.7692	0.7353	0.7042	0.6757	0.6494	0.6250	0.5618	0.5263	0.4545	0.3571
7	0.9346	0.8772	0.8264	0.7813	0.7407	0.7042	0.6711	0.6410	0.6135	0.5882	0.5236	0.4878	0.4167	0.3226
8	0.9259	0.8621	0.8065	0.7576	0.7143	0.6757	0.6410	0.6098	0.5814	0.5556	0.4902	0.4545	0.3846	0.2941
9	0.9174	0.8475	0.7874	0.7353	0.6897	0.6494	0.6135	0.5814	0.5525	0.5263	0.4608	0.4255	0.3571	0.2703
10	0.9091	0.8333	0.7692	0.7143	0.6667	0.6250	0.5882	0.5556	0.5263	0.5000	0.4348	0.4000	0.3333	0.2500
15	0.8696	0.7692	0.6897	0.6250	0.5714	0.5263	0.4878	0.4545	0.4255	0.4000	0.3390	0.3077	0.2500	0.1818
20	0.8333	0.7143	0.6250	0.5556	0.5000	0.4545	0.4167	0.3846	0.3571	0.3333	0.2778	0.2500	0.2000	0.1429
30	0.7692	0.6250	0.5263	0.4545	0.4000	0.3571	0.3226	0.2941	0.2703	0.2500	0.2041	0.1818	0.1429	0.1000
40	0.7143	0.5556	0.4545	0.3846	0.3333	0.2941	0.2632	0.2381	0.2174	0.2000	0.1613	0.1429	0.1111	0.0769
50	0.6667	0.5000	0.4000	0.3333	0.2857	0.2500	0.2222	0.2000	0.1818	0.1667	0.1333	0.1176	0.0909	0.0625

表 2　t 期現在価値(複利)

期間数	利回り 1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	13%	15%	20%	30%
1	0.9901	0.9804	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346	0.9259	0.9174	0.9091	0.8850	0.8696	0.8333	0.7692
2	0.9803	0.9612	0.9426	0.9246	0.9070	0.8900	0.8734	0.8573	0.8417	0.8264	0.7831	0.7561	0.6944	0.5917
3	0.9706	0.9423	0.9151	0.8890	0.8638	0.8396	0.8163	0.7938	0.7722	0.7513	0.6931	0.6575	0.5787	0.4552
4	0.9610	0.9238	0.8885	0.8548	0.8227	0.7921	0.7629	0.7350	0.7084	0.6830	0.6133	0.5718	0.4823	0.3501
5	0.9515	0.9057	0.8626	0.8219	0.7835	0.7473	0.7130	0.6806	0.6499	0.6209	0.5428	0.4972	0.4019	0.2693
6	0.9420	0.8880	0.8375	0.7903	0.7462	0.7050	0.6663	0.6302	0.5963	0.5645	0.4803	0.4323	0.3349	0.2072
7	0.9327	0.8706	0.8131	0.7599	0.7107	0.6651	0.6227	0.5835	0.5470	0.5132	0.4251	0.3759	0.2791	0.1594
8	0.9235	0.8535	0.7894	0.7307	0.6768	0.6274	0.5820	0.5403	0.5019	0.4665	0.3762	0.3269	0.2326	0.1226
9	0.9143	0.8368	0.7664	0.7026	0.6446	0.5919	0.5439	0.5002	0.4604	0.4241	0.3329	0.2843	0.1938	0.0943
10	0.9053	0.8203	0.7441	0.6756	0.6139	0.5584	0.5083	0.4632	0.4224	0.3855	0.2946	0.2472	0.1615	0.0725
15	0.8613	0.7430	0.6419	0.5553	0.4810	0.4173	0.3624	0.3152	0.2745	0.2394	0.1599	0.1229	0.0649	0.0195
20	0.8195	0.6730	0.5537	0.4564	0.3769	0.3118	0.2584	0.2145	0.1784	0.1486	0.0868	0.0611	0.0261	0.0053
30	0.7419	0.5521	0.4120	0.3083	0.2314	0.1741	0.1314	0.0994	0.0754	0.0573	0.0256	0.0151	0.0042	0.0004
40	0.6717	0.4529	0.3066	0.2083	0.1420	0.0972	0.0668	0.0460	0.0318	0.0221	0.0075	0.0037	0.0007	0.0000
50	0.6080	0.3715	0.2281	0.1407	0.0872	0.0543	0.0339	0.0213	0.0134	0.0085	0.0022	0.0009	0.0001	0.0000

表 3 比 V_S / V_C

単利/複利 期間数	利回り 1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	13%	15%	20%	30%
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	1.0001	1.0004	1.0008	1.0015	1.0023	1.0032	1.0043	1.0055	1.0069	1.0083	1.0134	1.0173	1.0286	1.0563
3	1.0003	1.0011	1.0025	1.0043	1.0066	1.0093	1.0124	1.0159	1.0197	1.0238	1.0381	1.0489	1.0800	1.1563
4	1.0006	1.0023	1.0049	1.0085	1.0129	1.0181	1.0241	1.0307	1.0379	1.0458	1.0727	1.0931	1.1520	1.2982
5	1.0010	1.0037	1.0081	1.0139	1.0210	1.0294	1.0389	1.0495	1.0611	1.0737	1.1166	1.1493	1.2442	1.4852
6	1.0014	1.0055	1.0119	1.0204	1.0308	1.0430	1.0569	1.0722	1.0890	1.1072	1.1696	1.2174	1.3573	1.7239
7	1.0020	1.0076	1.0164	1.0281	1.0423	1.0589	1.0777	1.0986	1.1215	1.1463	1.2317	1.2976	1.4930	2.0241
8	1.0026	1.0101	1.0216	1.0368	1.0553	1.0769	1.1014	1.1286	1.1585	1.1909	1.3032	1.3905	1.6538	2.3992
9	1.0034	1.0128	1.0274	1.0466	1.0699	1.0971	1.1279	1.1622	1.1999	1.2410	1.3844	1.4970	1.8428	2.8661
10	1.0042	1.0158	1.0338	1.0573	1.0859	1.1193	1.1571	1.1994	1.2460	1.2969	1.4759	1.6182	2.0639	3.4465
15	1.0095	1.0353	1.0745	1.1256	1.1880	1.2613	1.3459	1.4419	1.5500	1.6709	2.1201	2.5037	3.8518	9.3065
20	1.0168	1.0614	1.1288	1.2173	1.3266	1.4578	1.6124	1.7927	2.0016	2.2425	3.2009	4.0916	7.6675	27
30	1.0368	1.1321	1.2775	1.4743	1.7288	2.0512	2.4556	2.9596	3.5859	4.3624	7.9828	12	34	262
40	1.0635	1.2267	1.4827	1.8465	2.3467	3.0252	3.9406	5.1725	6.8281	9.0519	21.4164	38	163	2,778
50	1.0964	1.3458	1.7536	2.3689	3.2764	4.6050	6.5460	9.3803	13.5195	19.5651	60.0981	127	827	31,121

表３では，V_S / V_C<1.1すなわち，単利と複利との乖離幅が10%未満に収まっている箇所をシャドーで示している。シャドーの領域を検討すれば，高々資本コスト８%，７年程度の投資案件評価においては，単利と複利との乖離はさほど問題にはならない。また，杉山(2002，p.4)が「製品寿命の短命化により，

プロジェクトの貢献年数が短縮化され，たとえば，2,3年くらいの短期間であれば，割引計算をするかどうかの影響はさして大きくない」と主張するように，戦略的投資の貢献期間は高々５年もないといえる。しかし，２桁の資本コストや10年を越える期間を対象に，理論的シミュレーションを行う場合に注意を払わなければならない。これらのシャドー外の領域では，投資案件評価において，複利計算になれているので，いわば単利バイアスが起こりやすい。

3.2. 年金現在価値の比較

(1)式のNPV_Cと(2)式のNPV_Sを比較するには，各期のCF_tのウエイトを確定させる必要がある。しかし，一般論的に扱うことは不可能である。そこで，単純な毎期１円の年金キャッシュフローを取り上げて両者を比較する。

$$AV_C = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^t} = \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^t}\right\} \tag{10}$$

複利年金現在価値は(10)式と定番の等比級数で表わすことができる。これに対応する単利年金現在価値は初等関数では表わすことはできず，(11)式のディー・ガンマ関数を用いた表現になる。

$$AV_S = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+2r} + \cdots + \frac{1}{1+tr} = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{t}\frac{1}{k+1/r} = \frac{1}{r}\left\{\varphi\left(t+1+\frac{1}{r}\right) - \varphi\left(\frac{1}{r}\right) - r\right\} \tag{11}$$ [6]

(11)式の$\varphi(z)$はディー・ガンマ関数と呼ばれる特殊関数で，ディー・ガンマ関数は(11)式の通り，対数ガンマ関数を微分した関数である。

$$\varphi(z) = \{\ln\Gamma(z)\}' = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{\int_0^\infty e^{-s}s^{z-1}\ln s\,ds}{\int_0^\infty e^{-s}s^{z-1}ds} \tag{12}$$

6　プルドニコフ(1991,p.600)の次の公式を発展させて導いた。 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+a} = \varphi(n+a+1) - \varphi(a)$

■証明：(11)式を数学的帰納法で証明する。

t =1の場合

$$左辺= 1 / (1 + r) \tag{13}$$

$$右辺= \frac{1}{r}\left\{\varphi\left(2+\frac{1}{r}\right)-\varphi\left(\frac{1}{r}\right)-r\right\} \tag{14}$$

ここで，部分積分を行うことで得られるガンマ関数の性質を表すよく知られた(15)式がある。(15)式で両辺対数をとり微分することで(16)式が成り立つ。

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \tag{15}$$

$$\varphi(z+1)=\frac{1}{z}+\varphi(z) \tag{16}$$

(16)式の関係を(14)式に適用すると(16)式の通り展開できる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\left\{\varphi\left(2+\frac{1}{r}\right)-\varphi\left(\frac{1}{r}\right)-r\right\}&=\frac{1}{r}\left\{1\middle/\left(1+\frac{1}{r}\right)+\varphi\left(1+\frac{1}{r}\right)-\varphi\left(\frac{1}{r}\right)-r\right\}\\&=\frac{1}{r}\left\{\frac{r}{1+r}+r+\varphi\left(\frac{1}{r}\right)-\varphi\left(\frac{1}{r}\right)-r\right\}=\frac{1}{1+r}=左辺\end{aligned} \tag{17}$$

t のとき(11)式が成り立つと仮定すれば，

$$左辺=\sum_{k=1}^{t+1}\frac{1}{1+kr} \tag{18}$$

$$右辺=\frac{1}{r}\left\{\varphi\left(t+2+\frac{1}{r}\right)-\varphi\left(\frac{1}{r}\right)-r\right\} \tag{19}$$

ここで，(19)式に(16)式の関係を適用することにより

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\left\{\varphi\left(t+2+\frac{1}{r}\right)-\varphi\left(\frac{1}{r}\right)-r\right\} &= \frac{1}{r}\left\{1\Big/\left(t+1+\frac{1}{r}\right)+\varphi\left(t+1+\frac{1}{r}\right)-\varphi\left(\frac{1}{r}\right)-r\right\} \\
&= \frac{1}{r}\left\{\frac{r}{1+(n+1)r}\right\}+\sum_{k=1}^{t}\frac{1}{1+kr} \qquad (20) \\
&= \sum_{k=1}^{t+1}\frac{1}{1+kr} = \text{左辺}
\end{aligned}
$$

証明終り■

単利年金現在価値を表す(11)式は一見簡単そうに見えるが，(10)式に比べ，いくつかの数学的に取扱いにくい点を含む。いちばんの難点はt→∞で(10)式は$(1/r)$に収束するのに対し，(11)式は発散することである。ファイナンスの要請からいえば，永久年金価値は単利では達成できないので，投資案件評価で，事業が安定期を迎えた以降のキャシュフロー価値を永久年金手法では算定できないことを意味する。つまり，単利では理論的シミュレーションに難点がある。とはいえ，ここでも3.1節同様，実務的な範囲で代表的な値を検討する。表 4 は単利年金現在価値，表 5 は複利年金現在価値，表 6 は比AV_S/AV_Cの値を表す。

表 4 単利年金現在価値

単利	利回り												
期間数	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	13%	15%	20%	30%

期間数	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	13%	15%	20%	30%
1	0.9901	0.9804	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346	0.9259	0.9174	0.9091	0.8850	0.8696	0.8333	0.7692
2	1.9705	1.9419	1.9143	1.8875	1.8615	1.8363	1.8118	1.7880	1.7649	1.7424	1.6786	1.6388	1.5476	1.3942
3	2.9414	2.8853	2.8317	2.7803	2.7310	2.6837	2.6382	2.5944	2.5523	2.5117	2.3980	2.3285	2.1726	1.9205
4	3.9029	3.8113	3.7246	3.6424	3.5644	3.4902	3.4195	3.3520	3.2876	3.2259	3.0559	2.9535	2.7282	2.3751
5	4.8553	4.7203	4.5941	4.4757	4.3644	4.2594	4.1602	4.0663	3.9772	3.8926	3.6620	3.5249	3.2282	2.7751
6	5.7987	5.6132	5.4416	5.2822	5.1336	4.9947	4.8644	4.7420	4.6266	4.5176	4.2238	4.0512	3.6827	3.1322
7	6.7333	6.4904	6.2680	6.0634	5.8743	5.6989	5.5356	5.3830	5.2401	5.1058	4.7473	4.5390	4.0994	3.4548
8	7.6592	7.3525	7.0745	6.8210	6.5886	6.3746	6.1766	5.9928	5.8215	5.6614	5.2375	4.9935	4.4840	3.7489
9	8.5766	8.1999	7.8619	7.5563	7.2783	7.0239	6.7901	6.5742	6.3740	6.1877	5.6984	5.4191	4.8411	4.0192
10	9.4857	9.0333	8.6311	8.2706	7.9449	7.6489	7.3783	7.1297	6.9003	6.6877	6.1332	5.8191	5.1745	4.2692
15	13.9112	13.0035	12.2316	11.5646	10.9808	10.4643	10.0032	9.5883	9.2124	8.8699	8.0006	7.5228	6.5720	5.2974
20	18.1491	16.6816	15.4808	14.4747	13.6161	12.8722	12.2198	11.6419	11.1253	10.6602	9.5022	8.8787	7.6631	6.0821
30	26.1214	23.3137	21.1601	19.4414	18.0293	16.8433	15.8294	14.9503	14.1791	13.4957	11.8373	10.9680	9.3172	7.2498
40	33.5048	29.1683	26.0112	23.5829	21.6426	20.0479	18.7084	17.5639	16.5720	15.7024	13.6262	12.5564	10.5581	8.1129
50	40.3803	34.4086	30.2451	27.1349	24.7019	22.7346	21.1035	19.7244	18.5398	17.5090	15.0765	13.8382	11.5514	8.7979

表 5 複利年金現在価値

複利	利回り													
期間数	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	13%	15%	20%	30%
1	0.9901	0.9804	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346	0.9259	0.9174	0.9091	0.8850	0.8696	0.8333	0.7692
2	1.9704	1.9416	1.9135	1.8861	1.8594	1.8334	1.8080	1.7833	1.7591	1.7355	1.6681	1.6257	1.5278	1.3609
3	2.9410	2.8839	2.8286	2.7751	2.7232	2.6730	2.6243	2.5771	2.5313	2.4869	2.3612	2.2832	2.1065	1.8161
4	3.9020	3.8077	3.7171	3.6299	3.5460	3.4651	3.3872	3.3121	3.2397	3.1699	2.9745	2.8550	2.5887	2.1662
5	4.8534	4.7135	4.5797	4.4518	4.3295	4.2124	4.1002	3.9927	3.8897	3.7908	3.5172	3.3522	2.9906	2.4356
6	5.7955	5.6014	5.4172	5.2421	5.0757	4.9173	4.7665	4.6229	4.4859	4.3553	3.9975	3.7845	3.3255	2.6427
7	6.7282	6.4720	6.2303	6.0021	5.7864	5.5824	5.3893	5.2064	5.0330	4.8684	4.4226	4.1604	3.6046	2.8021
8	7.6517	7.3255	7.0197	6.7327	6.4632	6.2098	5.9713	5.7466	5.5348	5.3349	4.7988	4.4873	3.8372	2.9247
9	8.5660	8.1622	7.7861	7.4353	7.1078	6.8017	6.5152	6.2469	5.9952	5.7590	5.1317	4.7716	4.0310	3.0190
10	9.4713	8.9826	8.5302	8.1109	7.7217	7.3601	7.0236	6.7101	6.4177	6.1446	5.4262	5.0188	4.1925	3.0915
15	13.8651	12.8493	11.9379	11.1184	10.3797	9.7122	9.1079	8.5595	8.0607	7.6061	6.4624	5.8474	4.6755	3.2682
20	18.0456	16.3514	14.8775	13.5903	12.4622	11.4699	10.5940	9.8181	9.1285	8.5136	7.0248	6.2593	4.8696	3.3158
30	25.8077	22.3965	19.6004	17.2920	15.3725	13.7648	12.4090	11.2578	10.2737	9.4269	7.4957	6.5660	4.9789	3.3321
40	32.8347	27.3555	23.1148	19.7928	17.1591	15.0463	13.3317	11.9246	10.7574	9.7791	7.6344	6.6418	4.9966	3.3332
50	39.1961	31.4236	25.7298	21.4822	18.2559	15.7619	13.8007	12.2335	10.9617	9.9148	7.6752	6.6605	4.9995	3.3333

表 6 比 AV_S/AV_C

単利/複利	利回り													
期間数	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	13%	15%	20%	30%
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	1.0000	1.0002	1.0004	1.0007	1.0011	1.0016	1.0021	1.0027	1.0033	1.0040	1.0063	1.0081	1.0130	1.0245
3	1.0001	1.0005	1.0011	1.0019	1.0029	1.0040	1.0053	1.0067	1.0083	1.0100	1.0156	1.0198	1.0314	1.0575
4	1.0002	1.0009	1.0020	1.0034	1.0052	1.0072	1.0095	1.0120	1.0148	1.0177	1.0274	1.0345	1.0539	1.0964
5	1.0004	1.0015	1.0031	1.0054	1.0081	1.0112	1.0146	1.0184	1.0225	1.0269	1.0412	1.0515	1.0794	1.1394
6	1.0006	1.0021	1.0045	1.0076	1.0114	1.0157	1.0205	1.0258	1.0314	1.0373	1.0566	1.0705	1.1074	1.1852
7	1.0008	1.0028	1.0061	1.0102	1.0152	1.0209	1.0271	1.0339	1.0412	1.0488	1.0734	1.0910	1.1373	1.2329
8	1.0010	1.0037	1.0078	1.0131	1.0194	1.0265	1.0344	1.0428	1.0518	1.0612	1.0914	1.1128	1.1686	1.2818
9	1.0012	1.0046	1.0097	1.0163	1.0240	1.0327	1.0422	1.0524	1.0632	1.0744	1.1104	1.1357	1.2010	1.3313
10	1.0015	1.0056	1.0118	1.0197	1.0289	1.0392	1.0505	1.0625	1.0752	1.0884	1.1303	1.1595	1.2342	1.3809
15	1.0033	1.0120	1.0246	1.0401	1.0579	1.0774	1.0983	1.1202	1.1429	1.1662	1.2380	1.2865	1.4056	1.6209
20	1.0057	1.0202	1.0406	1.0651	1.0926	1.1223	1.1535	1.1858	1.2187	1.2521	1.3527	1.4185	1.5737	1.8343
30	1.0122	1.0410	1.0796	1.1243	1.1728	1.2236	1.2756	1.3280	1.3801	1.4316	1.5792	1.6704	1.8713	2.1758
40	1.0204	1.0663	1.1253	1.1915	1.2613	1.3324	1.4033	1.4729	1.5405	1.6057	1.7848	1.8905	2.1131	2.4339
50	1.0302	1.0950	1.1755	1.2631	1.3531	1.4424	1.5292	1.6123	1.6913	1.7659	1.9643	2.0777	2.3105	2.6394

表 6 では，3.1.節表 3 と同様に，$AV_S/AV_C<1.1$すなわち，単利と複利で10%未満に乖離が収まっている箇所をシャドーで示しているが，表 3 よりはシャドーの領域は広い。毎期均等なキャッシュフローウェイトを前提とした場合においては，実務的投資案件評価において単利と複利の違いはさほど意識する必要はない。

4. 結　論

われわれはファイナンスであたりまえのこととされている複利概念を用いる根拠から考察を出発した。単利か複利かの選択の問題にはさまざまな根拠が考えられるが，マーケットに複利の証券投資対象がどれだけあるかがいちばん検討すべきことと考えた。その流れからは，必ずしも積極的に単利を棄却し，複

利を採用する頑強な根拠はみられない。そこに，単利で現在価値の体系を検討することには少なくとも意義を見出せた。

われわれは，ｔ期の現在価値，年金現在価値に絞って，単利と複利ではどれほどの差異があるかを調べた。その結果，高々資本コスト8%，7年程度の投資案件評価においては，単利と複利との乖離はさほど問題にはならないことがわかった。しかし，理論的シミュレーションを行う場合，単利では永久年金が発散するという取扱いにくい難点があることも判明した。

本稿の(11)式のディー・ガンマ関数を用いた，単利年金現在価値表現は，ファイナンスの文献では取り扱われていないと思われ，筆者のオリジナルと考える。しかしながら，実務上はこの公式を用いることはあまり考えられなく，ファイナンスでの発展から鑑みれば，本稿は研究ノートの範囲からは脱していないと考える。今後学術上の貢献を展望すれば，単利―複利バイアスの行動論的研究，回収期間法との関連をおいた実務的提案などを検討して行きたい。

以上

付録：単利年金現在価値の近似値

(11)式の単利年金現在価値はExcelで各期を加えていくことで容易に求まるので，左辺のディー・ガンマ関数表示も実務上さほど意義があるとはいえない。ディー・ガンマ関数表示の近似式も同様に実務上意義があるものとは思えないが，数学上の興味から以下紹介する[7]。

$$\varphi(z) = \ln(z-1) + \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{12(z-1)^2} + \frac{1}{120(z-1)^4} \tag{21}$$

近似式(20)を(10)式に代入すれば，

7　森口ら(1960,p.12)

$$AV_S = \frac{1}{r}\left\{\varphi\left(t+1+\frac{1}{r}\right)-\varphi\left(\frac{1}{r}\right)-r\right\} = \ln\left(\frac{1+tr}{1-r}\right)+\frac{1}{2(t+1/r)}-\frac{1}{12(t+1/r)^2}+\frac{1}{120(1+1/r)^4}$$

$$-\frac{1}{2(1/r-1)}+\frac{1}{12(1/r-1)^2}-\frac{1}{120(1/r-1)^4} \tag{22}$$

この近似式を用いて，計算した近似値と表 4 との比は表 7 の通りである。

表 7　近似値との比

近似/単利 期間数	利回り 1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	13%	15%	20%	30%
1	0.9991	0.9982	0.9973	0.9962	0.9952	0.9940	0.9928	0.9915	0.9902	0.9887	0.9840	0.9803	0.9694	0.9378
2	0.9996	0.9991	0.9986	0.9981	0.9975	0.9969	0.9963	0.9956	0.9949	0.9941	0.9915	0.9896	0.9835	0.9657
3	0.9997	0.9994	0.9991	0.9987	0.9983	0.9979	0.9974	0.9970	0.9965	0.9959	0.9941	0.9927	0.9883	0.9751
4	0.9998	0.9995	0.9993	0.9990	0.9987	0.9984	0.9980	0.9977	0.9973	0.9968	0.9954	0.9942	0.9907	0.9798
5	0.9998	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9974	0.9961	0.9951	0.9921	0.9828
6	0.9999	0.9997	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9977	0.9966	0.9958	0.9931	0.9847
7	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9990	0.9988	0.9985	0.9983	0.9980	0.9970	0.9962	0.9938	0.9861
8	0.9999	0.9998	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989	0.9987	0.9984	0.9982	0.9973	0.9966	0.9943	0.9872
9	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9975	0.9968	0.9947	0.9881
10	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9993	0.9991	0.9989	0.9987	0.9985	0.9977	0.9971	0.9951	0.9888
15	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9982	0.9977	0.9961	0.9910
20	1.0000	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9993	0.9992	0.9990	0.9985	0.9981	0.9967	0.9921
30	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9988	0.9984	0.9973	0.9934
40	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9993	0.9990	0.9986	0.9976	0.9941
50	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9991	0.9988	0.9978	0.9946

参考文献

Brealey, R. A. and M. C. Myers(2002) "Principles of Corporate Finance 7th ed.," McGraw Hill.

古川浩一・蜂谷豊彦・中里宗敬・今井潤一(2001)「基礎からのコーポレート・ファイナンス第2版」中央経済社

森口繁一，宇田川銈久，一松信(1957)「数学公式II」岩波書店

森口繁一，宇田川銈久，一松信(1960)「数学公式III」岩波書店

プルドニコフ，A,П(1991)「新数学公式集I」，翻訳者：大槻義彦・室谷義昭，　丸善

ロス・ステファンA, R.W. ウェスターフィールド, J.F.ジャフェ(2004)「コーポレートファイナンスの原理」金融財政事情研究会(Ross, Stephen A, R.W. Westerfield and J.F.Jaffe (2002) "Corporate Finance 6th ed," McGrawHillの翻訳. 翻訳者　大野薫.

杉山善浩(2002)「投資効率を高める資本予算」中央経済社

提出年月日：2006年 5 月17日